

Kohlekern; im zentraleren Stoß könnte sowohl eine höhere Energie übertragen als auch eine größere Mesonenzahl erzeugt werden.

Sehr deutlich machen sich die Sekundärstöße der durchdringenden Schauerteilchen in den energieärmeren Prozessen bemerkbar: Aus Blei werden im Mittel 5-mal mehr stark ionisierende Teilchen emittiert als aus Kohle; und offensichtlich infolge dieser elastischen Stöße verbreitert sich die Garbe der durchdringenden Schauerteilchen aus Blei um fast das Doppelte gegenüber der aus Kohle.

Wenn die Aussage über den geringen Beitrag der Sekundärstöße zur Vermehrung der Schauerteilchenzahl richtig ist, so folgt daraus, daß die Kernmaterie hinsichtlich der Mesonenerzeugung etwas

transparent sein muß. In Einklang damit steht der niedrige Wirkungsquerschnitt des Kohlekernes.

Herrn Prof. Dr. W. Heisenberg darf ich für anregende Diskussionen und für seine wohlwollende Förderung der Arbeit danken. Die Messungen auf der Zugspitze wären nicht möglich gewesen ohne die Initiative von Herrn Prof. Dr. K. Wirtz und ohne das Entgegenkommen der Deutschen Bundespost, die uns einen ihrer Räume zur Verfügung gestellt hat. Bei der Einrichtung des Raumes und bei der Vorbereitung für die Aufstellung der Nebelkammer war die Mithilfe der Herren K. Geismann, A. Kaehs und M. Pöschel von großem Wert. Ganz besonders möchte ich auch Herrn K. Böttcher danken, der bei der Bedienung der Nebelkammer mitwirkte und nicht nur die angenehme, sondern auch manche mühsame Situation des Berglebens auf sich nahm.

Numerische Rechnungen zur Kaskadentheorie Energiebestimmung von π^0 -Mesonen

Von KARL OTT

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforsch. 9a, 488—494 [1954]; eingegangen am 10. April 1954)

Die Anzahl der Elektronen einer Elektronen-Photonenkaskade in Blei wird als Funktion des Abstands vom Schauerursprung für einige Primärenergien E_0 (0,3 bis 300 GeV) numerisch berechnet und zwar für den Fall eines primären Photons bzw. Elektrons der Energie E_0 und für ein primäres Spektrum von Photonen, wie es aus den beim Stoß zweier Nukleonen erzeugten π^0 -Mesonen durch $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ -Zerfall entsteht. Die zugrunde gelegte Theorie der Elektronen-Photonenkaskade wurde in einer früheren Arbeit¹ dargestellt.

Die Ergebnisse über die Elektronenverteilung in durchdringenden Schauern gestatten z. B. aus Nebelkammeraufnahmen² solcher Schauer den Energieinhalt der dabei erzeugten π^0 -Mesonen zu bestimmen.

Außerdem wurde die von einem Photonenspektrum vom Bremsstrahltyp ausgelöste Elektronenkaskade berechnet und mit den Messungen von Blocker, Kenney und Panofsky³ verglichen.

Zum Schluß wurde noch die Möglichkeit zur Energiemessung diskutiert, wenn die Teilchenzahl im Schauerkern so groß ist, daß sie nicht mehr ausgezählt werden kann.

Bei der theoretischen Behandlung der Elektronen-Photonenkaskade wurden ursprünglich für die die Kaskade auslösenden Prozesse, Bremsstrahlung und Paarerzeugung, die Wirkungsquerschnitte im Grenzfall hoher Energie (bei vollständiger Abschirmung) benutzt (ausführliche Literaturhinweise siehe l. c.¹). In diesem Grenzfall ist z. B. der Absorptionskoeffizient der γ -Quanten unabhängig von der Energie ($\approx 7/9$). Kommen jedoch die Kaskadenteilchen nach Aufspaltung der Anfangsenergie in den Energiebereich unterhalb etwa 100 MeV, dann wird

ihre Absorption schwächer; die der γ -Quanten nimmt aber bei noch kleineren Energien infolge des Compton-Effekts wieder zu. In einer früheren Arbeit¹ wurden diese Effekte in erster Näherung berücksichtigt.

1. Die Einteilchenkaskade

Tritt ein Photon der Energie E_0 in Materie ein, so löst es bei hinreichend großem E_0 eine Kaskade aus, die sich im wesentlichen in der Impulsrichtung des Primärteilchens ausbreitet. Die Materialdicke x

¹ Vorträge über kosmische Strahlung, Herausgeb. W. Heisenberg, Springer 1953 (woraus der größte Teil der Bezeichnungen übernommen wurde).

² M. Deutschmann, Z. Naturforsch. 9a, 477 [1954].

³ W. Blocker, R. Kenney u. W. Panofsky, Phys. Rev. 79, 419 [1950].



werde in Strahlungslängen x_0 gemessen: $x/x_0=t$. Für die Anzahl der die Stelle t passierenden Elektronen, wir wollen sie mit $\Phi_\gamma(t, E_0)$ bezeichnen (der Index γ soll auf ein Photon als Primärteilchen hinweisen), ergab sich (l. c.¹, S. 341 u. 415) der folgende Ausdruck:

$$\Phi_\gamma(t, E_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left(\frac{E_0}{\bar{\varepsilon}'} \right)^s \frac{\chi_{\gamma q}^{(1)}(s)}{s \lambda_1'(s)} (1 + h(s)) e^{\sigma t} d\sigma; \quad (1)$$

$\lambda_1(s)$ beschreibt die Absorption des Schauers, $\chi_{\gamma q}^{(1)}(s)$ den „Übergang“ von Photonen (γ) in Elektronen (q) durch Paarerzeugung (bei vollständiger Abschirmung). Beide Funktionen, wir nennen sie im folgenden abkürzend $\lambda(s)$ und $\chi(s)$, sind in den meisten Abhandlungen über Kaskadentheorie tabuliert [$\chi(s)$ ist dort mit $B_s/\lambda_2(s) - \lambda_1(s)$ bezeichnet] (vgl. auch l. c.¹, S. 337). Mit $\lambda'(s)$ ist die Ableitung nach s gemeint. ε , die sog. kritische Energie, ist gleich dem Ionisationsverlust pro Strahlungslänge. $\bar{\varepsilon}$ ist gegeben durch

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon \frac{\chi(1)}{\lambda'(1)},$$

und in $\bar{\varepsilon}'$ ist der Einfluß der Vielfachstreuung in erster Näherung mitberücksichtigt [vgl. Gl. (8), l. c.⁴ und l. c.¹, S. 344):

$$\bar{\varepsilon}' = \bar{\varepsilon} \left(\frac{1}{\cos \vartheta'} \right). \quad (2)$$

In Blei hat $\left(\frac{1}{\cos \vartheta'} \right)$ den Wert 1/0,75 und mit $\varepsilon = 7,6$ MeV ist $\bar{\varepsilon}' = 4,4$ MeV. $h(s)$ enthält den Einfluß des Compton-Effekts und der unvollständigen Abschirmung bei Bremsstrahlung und Paarerzeugung, der unter etwa 100 MeV wesentlich wird. $h(s)$ wurde numerisch berechnet und kann (l. c.¹, S. 340) durch die folgende Näherungsformel dargestellt werden

$$h(s) = \sqrt{s} \left(c_0 + c_1 s^2 + \frac{c_2}{c_3 - s} \right). \quad (3)$$

Die Konstanten c_n hängen nur vom Absorptionsmaterial ab. Ihre Werte wurden für Luft und Blei berechnet¹ [vgl. (3c)], wobei besonders auf eine gute Darstellung der Maximumgegend geachtet wurde. Da aber bei der Energiebestimmung durchdringender Schauer oft die Elektronenanzahl nur hinter großen Dicken gemessen werden kann, sind die c_n noch etwas abzuändern. Im wesentlichen handelt es sich dabei um eine Neubestimmung von c_3 , der Konstanten, die nach (3) die Werte von s

nach oben begrenzt und damit den schließlichen Absorptionskoeffizient $[\lambda(c_3)]$ des Schauers festlegt, der dem der Photonen im „Compton-Fenster“ entspricht [Gl. (3a)]. Die Energie dieser Photonen soll hier mit $E_{\gamma c}$ bezeichnet werden.

$\vartheta(E_\gamma)$ sei der totale Absorptionskoeffizient der γ -Quanten:

$$\bar{\vartheta}(E_\gamma) = \vartheta(E_\gamma) + w_{ctot}(E_\gamma) - g_c(E_\gamma).$$

Darin sind $\vartheta(E_\gamma)$ und $w_{ctot}(E_\gamma)$ die Wahrscheinlichkeiten für Paarbildung und Compton-Effekt pro Strahlungslänge. $g_c(E_\gamma)$ trägt der Tatsache Rechnung, daß die γ -Quanten durch den Compton-Effekt nicht katastrophisch absorbiert werden, daß also einem Photon mit einer größeren Energie als E_γ nach einem Compton-Prozeß die Energie E_γ (in dE_γ) verbleiben kann. $g_c(E_\gamma)$ hängt demnach von dem gerade vorhandenen Photonenpektrum ab, ist also eigentlich noch eine Funktion vom „Schaueralter“ s , das recht gut die Form des Photonenpektrums charakterisiert. Diese Rechnungen (vgl. l. c.¹) lassen sich aber nur durchführen, wenn g_c unabhängig von s angenommen wird. Da $g_c(E_\gamma)$ zu $\bar{\vartheta}(E_\gamma)$ nur einen kleinen Beitrag liefert, wurde (vgl. l. c.¹) der Wert von $g_c(E_\gamma)$ bei einem mittleren Schaueralter (dem am Maximum) benutzt. Bei großen Dicken hat aber das Photonenpektrum ein steiles Maximum bei der Energie $E_{\gamma c}$, da schließlich praktisch nur noch Photonen dieser Energie vorhanden sind. Dann wird offenbar $g_c(E_\gamma)$ vernachlässigbar klein. Man kann demnach die Teilchenzahlen bei großen Dicken nur richtig beschreiben, wenn man $g_c(E_\gamma) = 0$ setzt, also zunächst so rechnet, als würden die Photonen bei einem Compton-Prozeß absorbiert. Da nun anschließend bei der Berücksichtigung der Ionisationsbremsung von der Forderung der Erhaltung der primär einfallenden Energie Gebrauch gemacht wird, wird dieser Fehler zum großen Teil wieder kompensiert. c_3 ist also durch die folgende Gleichung bestimmt:

$$\lambda(c_3) = \vartheta(E_{\gamma c}) + w_{ctot}(E_{\gamma c}), \quad (\approx 0,25 \text{ in Blei})$$

woraus sich für Blei c_3 zu 1,32 ergibt.

Nimmt man für c_3 den Wert 1,32 und bestimmt die anderen Konstanten so, daß die Abweichung von dem ursprünglich¹ berechneten $h(s)$ möglichst klein wird, so zeigt sich, daß der Unterschied der zugehörigen Elektronenverteilungen einen Energieinhalt von etwa 5% von E_0 betrifft. Deshalb wurde das dem Wert $g_c = 0$ entsprechende $h(s)$ nicht neu berechnet, sondern mit Hilfe der eben genannten Forderung bestimmt:

$$c_0 = -0,443; \quad c_1 = 0,0350; \quad c_2 = 0,1308; \quad c_3 = 1,32.$$

Es waren (vgl. l. c.¹) die folgenden Werte angegeben worden:

$$c_0 = -0,413; \quad c_1 = -0,219; \quad c_2 = 0,177; \quad c_3 = 1,32.$$

Die Integrationsvariable σ [in (1)] hängt mit s über die folgende Gleichung zusammen:

$$\sigma = -\lambda'(s).$$

¹ R. R. Wilson, Phys. Rev. **86**, 261 [1952].

In den Integrationsgrenzen muß a größer sein als der negative Absorptionskoeffizient der Photonen im Compton-Fenster (in Pb $a \geq -0,25$).

Das Integral auf der rechten Seite von (1) läßt sich nach der Sattelpunktmethode ausführen. Bezeichnet man abkürzend $E_0/\bar{\varepsilon}'$ mit η_0 und mit $\Omega(\sigma)$ den Ausdruck

$$\Omega(\sigma) = \sigma t + \lg \left\{ \eta_0^s \frac{\chi(s)}{s\lambda'(s)} (1 + h(s)) \right\}, \quad (4)$$

dann erhält man:

$$\Phi_\gamma(t, E_0) = \eta_0^s \frac{\chi(s)}{s\lambda'(s)} \frac{1 + h(s)}{\sqrt{2\pi \dot{\Omega}(\sigma)}} e^{-\lambda(s)t} \quad (5)$$

mit t aus

$$\dot{\Omega}(\sigma) = 0 = \frac{d}{d\sigma} \Omega(\sigma) = \frac{\delta\Omega}{\delta\sigma} - \frac{1}{\lambda'(s)} \frac{\delta\Omega}{\delta s}. \quad (5a)$$

Nach (5) wurde $\Phi_\gamma(t, E_0)$ für einige E_0 -Werte numerisch berechnet und in Abb. 2 (gestrichelte Kurven) graphisch dargestellt. Abb. 7 gibt die entsprechenden von einem primären Elektron der Energie E_0 ausgelösten Verteilungen $[\Phi_\varphi(t, E_0)]$ wieder.

Wir bemerken noch, daß der Integrand von (1), wenn man den Faktor $e^{\sigma t}$ fortläßt, gleich der Laplace-Transformierten $[\Phi(\sigma, E_0)]$ von Φ ist:

$$\tilde{\Phi}(\sigma, E_0) = \int_0^\infty e^{-\sigma t} \Phi(t, E_0) dt. \quad (6)$$

Die rechte Seite von (1) ist danach die Laplace-Rücktransformierte. Setzt man in (6) $\sigma=0$, und multipliziert mit ε , dann ergibt sich

$$\varepsilon \tilde{\Phi}(0, E_0) = \varepsilon \int_0^\infty \Phi(t, E_0) dt. \quad (7)$$

Da $\Phi(t, E) dt$ gleich der Anzahl der Elektronen ist, die den Weg dt bei t zurücklegen und $\varepsilon \cdot \Phi(t, E_0) dt$ die dort verlorene Energie, muß die Summation auf der rechten Seite von (7) die gesamte primär einfallende Energie E_0 liefern. Wegen der besonders in schweren Materialien starken Vielfachstreuung legen die Elektronen jedoch nur einen Teil ihres Weges längs der Schauerachse zurück. Die Integration in (7) führt daher auf

$$E_0 = \varepsilon \left(\frac{1}{\cos \vartheta'} \right) \int_0^\infty \Phi(t, E_0) dt, \quad (8)$$

worin $\left(\frac{1}{\cos \vartheta'} \right)$ den über alle t und alle Energien im Schauer gemittelten reziproken Kosinus des Winkels ϑ' darstellt, den die Elektronenbahnen mit der Schauerachse einschließen (vgl. l. c.¹, S. 344). Für Blei hat $\left(\frac{1}{\cos \vartheta'} \right)$ etwa den Wert $1/0,75$ (vgl. l. c.⁴).

2. Die Kaskade eines primären Photonenspektrums

Löst an Stelle eines einzelnen Teilchens der Energie E_0 eine nach einem gewissen Spektrum verteilte Teilchenschar mit dem Energieinhalt E_0 die Kaskade aus, dann wird diese sich schneller entwickeln, und damit wird die Anzahl der Elektronen schon bei kleineren Schichtdicken ihr Maximum erreichen. Die Berechnung der Elektronenzahl, die jetzt mit $\Phi^*(t, E_0)$ bezeichnet werden soll, ist wie bei der Einteilchenkaskade durchzuführen. In (1) tritt dabei an die Stelle der Mellin-Transformierten des δ -funktionsförmigen Primärspektrums der Einteilchenkaskade

$$E_0^s = \int_0^\infty E'^s \delta(E' - E_0) dE' \quad (9)$$

die Funktion

$$\bar{n}(E_0, s) = \int_0^\infty E'^s n(E_0, E') dE', \quad (10)$$

wenn durch $n(E_0, E')$ das Primärspektrum mit dem Energieinhalt E_0 gegeben ist. Durch Auswerten der rechten Seite von (1) nach der Sattelpunktmethode läßt sich dann $\Phi^*(t, E_0)$ berechnen.

a) Das Photonenspektrum der in einem Kernprozeß erzeugten π^0 -Mesonen

Das Spektrum der bei einem Nukleon-Nukleon-Stoß erzeugten $\pi^0(\pi)$ -Mesonen ist nach Heisenberg⁵ im Grenzfall starker Wechselwirkung (abgesehen von mit $m_{\pi^0}c^2$ vergleichbaren Energien) gegeben durch:

$$\pi_0(E, E_0) dE = C \frac{dE}{E^2} \quad \text{für} \quad m_{\pi^0}c^2 \leq E \leq E_0. \quad (11)$$

Mit E ist darin die Energie der einzelnen π^0 -Mesonen bezeichnet. (Von den relativ kleinen Modifikationen dieses Spektrums, die von weiteren π -Generationen im Kern herrühren, sei hier abgesehen.) Die Konstante C wird durch den Energieinhalt bestimmt, der ebenso wie bei der Einteilchenkaskade mit E_0 bezeichnet werden soll. Es ergibt sich:

$$C = \frac{E_0}{\lg \frac{E_0}{m_{\pi^0}c^2}}. \quad (12)$$

Der Zerfall der π^0 -Mesonen läßt sich leicht beschreiben, wenn man beachtet, daß im Ruhesystem (eines π^0 -Mesons) die Energie der beiden Zerfallsp Photonen gleich $\left(\frac{1}{2} m_{\pi^0} c^2 \right)$ ist und die Impuls-

⁵ W. Heisenberg, Z. Phys. **133**, 65 [1952].

summe verschwindet. Da außerdem keine Richtung ausgezeichnet ist, liefert die Transformation ins Laborsystem, nach Integration über alle Winkel, ein konstantes Zerfallsspektrum $\{\gamma_0(E, E_\gamma)\}$ zwischen $E_{\gamma \min}$ und $E_{\gamma \max}$ (vgl. Oehme⁶, und Pais und Jost⁷):

$$\gamma_0(E, E_\gamma) dE_\gamma = \frac{2Q(E, E_\gamma)}{\sqrt{E^2 - m_{\pi^0}^2 c^4}} dE_\gamma \quad (13)$$

mit

$$Q(E, E_\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{für } E_{\gamma \min} \leq E_\gamma \leq E_{\gamma \max} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$E_{\gamma \max} = \frac{1}{2} \left(E \pm \sqrt{E^2 - m_{\pi^0}^2 c^4} \right).$$

Das Spektrum der aus den π^0 -Mesonen eines durchdringenden Schauers entstehenden Photonen $[\gamma(E_0, E_\gamma)]$ ist dann durch das folgende Integral gegeben:

$$\gamma(E_0, E_\gamma) = 2C \int_{E_{\min}}^{E_0} \frac{dE}{E^2 \sqrt{E^2 - m_{\pi^0}^2 c^4}}. \quad (14)$$

Hier wurde jedoch nicht mit dem strengen Zerfallsspektrum (13) gerechnet, sondern mit

$$\gamma_0(E, E_\gamma) dE_\gamma = 2 \frac{dE_\gamma}{E}, \quad \text{für } E_\gamma \leq E, \quad (13a)$$

(vgl. hierzu P. Budini, l. c.¹, S. 419), was an Stelle von (14) auf das folgende Photonenspektrum führt:

$$\gamma(E_0, E_\gamma) = \int_{E_{\min}}^{E_0} \frac{dE}{E^3} \quad \text{mit } E_{\min} = \begin{cases} m_{\pi^0} c^2 & \text{für } E_\gamma \leq m_{\pi^0} c^2 \\ E_\gamma & \text{für } E_\gamma \geq m_{\pi^0} c^2 \end{cases}.$$

In Abb. 1 werden die Photonenspektren (14) und (14a) verglichen. Es zeigt sich, daß das in (14) enthaltene Maximum bei $\frac{1}{2}m_{\pi^0}c^2$, das von den energiearmen Mesonen ($E \lesssim m_{\pi^0}c^2$) herrührt, durch die Näherung (13a) abgeschnitten wurde. Da das genauere π^0 -Erzeugungsspektrum aber weniger energiearme Mesonen enthält als die Form (11), wird das tatsächlich vorhandene Photonenspektrum durch (14a) wahrscheinlich besser dargestellt als durch (14).

Sowohl in (14) wie in (14a) ist so gerechnet, als würden sich die π^0 -Mesonen und deren Zerfallsp Photonen in Richtung des den durchdringenden Schauer auslösenden Nukleons bewegen. Der davon herrührende Fehler in der sich anschließenden Kaskade ist gering, da einerseits der Energieinhalt der

nach der Seite und nach hinten laufenden Photonen klein gegen die Gesamtenergie ist ($E_0 \gg m_{\pi^0}c^2$ vorausgesetzt), und er sich außerdem nur bei kleinen Dicken bemerkbar macht, die zur Messung ohnehin schlecht geeignet sind.

Von den durch Bremsstrahlung von Protonen und geladenen Mesonen erzeugten Photonen kann ebenfalls abgesehen werden, da, wie Oehme⁶ abgeschätzt hat, deren Energieinhalt maximal nur etwa 4% von dem der π^0 -Mesonen beträgt.

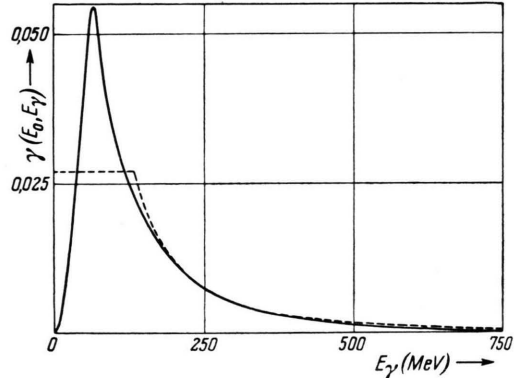


Abb. 1. Vergleich der Photonenspektren $\gamma(E_0, E_\gamma)$ in einem durchdringenden Schauer ($E_0 = 1$ GeV) nach (14) (—) und (14a) (---).

Von $\gamma(E_0, E_\gamma)$ [nach (14a)] wurde die Mellin-Transformierte (10) bezüglich E_γ berechnet und diese statt E_0 in (1) eingesetzt. Nach Ausführung der Integration wurde $\Phi^*(t, E_0)$ für einige E_0 -Werte berechnet und in Abb. 2 graphisch dargestellt. Mit Hilfe dieser Ergebnisse läßt sich der Energieinhalt der Mesonen eines durchdringenden Schauers bestimmen, wenn man auf Nebelkammeraufnahmen in der sich anschließenden Elektronenkaskade hinter bekannten Bleidicken die Anzahl der Elektronenspur auszählen kann (vgl. hierzu die vorangehende Arbeit von Deutschmann²). Hierzu ist es günstig, Abb. 2 umzuzeichnen und den Energieinhalt der Kaskade (E_0) als Funktion der Teilchenzahl darzustellen, mit der Schichtdicke als Parameter (als Beispiel vgl. Abb. 6).

b) Die Kaskade eines Photonenspektrums vom Bremsstrahltyp

Zum Vergleich mit den Experimenten von Blocker, Kenney und Panofsky wurde die Kaskade eines

⁶ R. Oehme, Z. Naturforschg. **7a**, 55 [1952].

⁷ A. Pais u. R. Jost, Phys. Rev. **87**, 871 [1952].

Photonenspektrums vom Bremsstrahltyp mit einer maximalen Energie $E_0 = 330$ MeV berechnet (Abb. 3). (Die Autoren haben mit Synchrotronelektronen von 330 MeV Bremsstrahlung erzeugt und die von diesem Photonenspektrum erzeugte Kaskade mit Hilfe einer flachen Ionisationskammer untersucht.)

3. Energiebestimmung in Schauern großer Anfangsenergie

Bei großer Anfangsenergie liegen, wenn man nicht die Möglichkeit hat, den Schauer weit hinter dem Maximum zu beobachten, die Elektronenspuren so

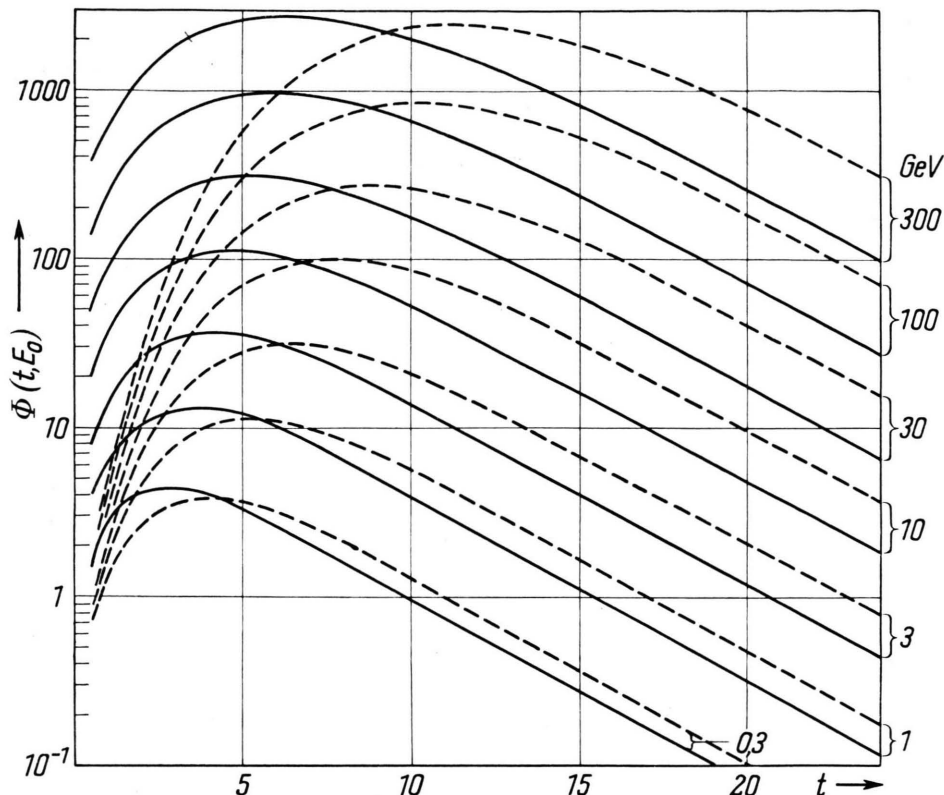


Abb. 2. $\Phi(t, E_0)$ in einer von einem einzelnen Photon (-----) der Energie E_0 (Parameter in GeV) und von einem Spektrum der Form (14a) (—) mit dem Energieinhalt E_0 ausgelösten Kaskade (in Blei).

Das Photonenspektrum wurde dabei in der folgenden Form angesetzt:

$$\gamma(E_0, E_\gamma) = 2 \left(\frac{1}{E_\gamma} - \frac{1}{E_0} \right).$$

Abb. 3 zeigt eine gute Übereinstimmung der empirischen und theoretischen Ergebnisse.

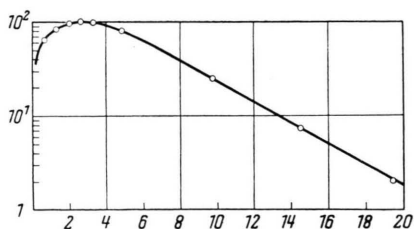


Abb. 3. Vergleich der Elektronenintensitäten in einer von einem Photonenspektrum vom Bremsstrahltyp ausgelösten Kaskade (maximale Energie 330 MeV) nach Blocker, Kenney und Panofsky³ mit dem

dicht, daß sie nicht mehr ausgezählt werden können. Eine erste Abschätzung der Energie läßt sich dann aus der Bestimmung der Lage des Maximums gewinnen, deren Energieabhängigkeit leicht aus Abb. 2 abgelesen werden kann. Da aber die Maximumdicke (t_{\max}) insbesondere in „ π^0 -Kaskaden“ nur sehr schwach mit der Energie anwächst, kann dabei der Fehler leicht einen Faktor 10 übersteigen.

Oft ist aber die Anzahl der Elektronenspuren außerhalb eines gewissen (projizierten) Winkels auszählbar. In diesen Fällen ist eine genauere Energiebestimmung möglich, wie die folgende Überlegung zeigt:

entsprechenden theoretischen Ergebnis (die Kreise sind die Meßpunkte). Auf der Abszisse ist die Bleidicke in Strahlungslängen aufgetragen, auf der Ordinate die Elektronenanzahl in willkürlichen Einheiten.

Haben die Elektronen zweier Schauer an einem gewissen Ort t Energieverteilungen, die sich nur um einen energieunabhängigen Faktor unterscheiden, dann ist in guter Näherung auch die Form der Winkelverteilung dieselbe. Da nun Schauer verschiedener Anfangsenergie bei gleichem, in Einheiten der Maximumdicke gemessenen Abstand vom Schauerursprung eine in erster Näherung ähnliche Energieverteilung haben (abgesehen vom hochenergetischen Ende des Spektrums), stimmen dort in der gleichen Näherung auch ihre Winkelverteilungen überein. Wenn wir mit Φ_ϑ die Anzahl und mit f_ϑ die relative Anzahl der Elektronen außerhalb des projizierten Winkels ϑ bezeichnen, dann gilt in erster Näherung (mit $\tau = t/t_{\max}$)

$$\frac{\Phi_\vartheta(t, E_0)}{\Phi(t, E_0)} = f_\vartheta\left(\frac{t}{t_{\max}}\right) = f_\vartheta(\tau).$$

Kennt man die Funktion $f_\vartheta(\tau)$ (für einen festen Winkel ϑ), die natürlich in Strenge noch schwach von E_0 (insbesondere bei kleinen E_0) abhängt, dann kann man daraus nach Bestimmung von t_{\max} und Φ_ϑ auf die Gesamtanzahl Φ der Teilchen an diesem Ort schließen und daraus auf die Energie E_0 . Deutschmann (unveröffentlicht) hat an Hand einiger (15) übersichtlicher Schauer $f_\vartheta(\tau)$ für $\vartheta = 45^\circ$ empirisch bestimmt (vgl. Abb. 4). Dabei zeigte sich für $f_\vartheta(\tau)$ der erwartete Gang: Im Rahmen der sta-

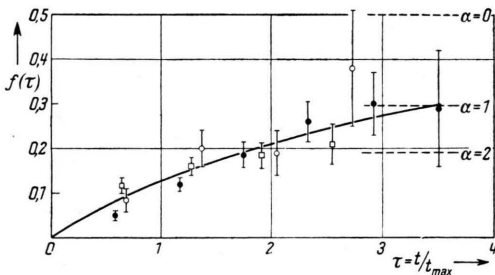


Abb. 4. $f(\tau)$ nach Messungen von Deutschmann (unveröffentlicht). Die einzelnen Meßpunkte sind aus durchdringenden Schauern gewonnen, deren π^0 -Energieinhalt E_0 zwischen 1,5 und 3 GeV (\circ), 4 und 7,5 GeV (\square) bzw. 10 und 20 GeV (\bullet) lag.

tistischen Schwankungen keine Abhängigkeit von E_0 und ein langsames Anwachsen mit τ (bis zu einem nicht genau bestimmbar Grenzwert), da die Winkelverteilung ja immer breiter wird.

Damit taucht die Frage nach einer mit den in Abb. 4 dargestellten empirischen Daten verträglichen Winkelverteilung $\omega(\vartheta')$ auf, deren Form im folgenden grob abgeschätzt werden soll. Wir setzen

dazu $\omega(\vartheta')$ (ϑ' sei der räumliche, ϑ der projizierte Winkel gegen die Schauerachse) an in der Form:

$$\omega(\vartheta') \sin \vartheta' d\vartheta' = (\alpha + 1) \cos^\alpha \vartheta' \sin \vartheta' d\vartheta'$$

mit
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(\vartheta') \sin \vartheta' d\vartheta' = 1.$$

Daraus ergibt sich für die projizierte Winkelverteilung:

$$v(\vartheta) d\vartheta = \frac{\alpha + 1}{2\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)} \cos^\alpha \vartheta d\vartheta.$$

Für die relative Anzahl der Teilchen außerhalb des Winkels 45° erhält man dann:

$$g(\alpha) = 2 \frac{\alpha + 1}{2\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha \vartheta d\vartheta.$$

Identifiziert man nun $g(\alpha)$ mit $f_{45}(\tau)$, dann ergibt sich numerisch ein Zusammenhang zwischen α und τ , der in Abb. 5 wiedergegeben wurde. Daraus sieht man, daß etwa bei der 1,7-fachen Maximumdicke α

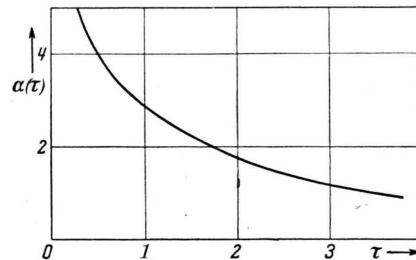


Abb. 5. $\alpha(\tau)$ ($\tau = \frac{t}{t_{\max}}$), der Exponent α der mit $\cos^\alpha \vartheta$ angesetzten Winkelverteilung, in den in Abb. 4 betrachteten Schauern. Ähnliche statistische Schwankungen wie in Abb. 4 sind noch hinzuzudenken.

gleich 2 wird, daß also dort etwa eine \cos^2 -Verteilung realisiert ist. Vor dieser Stelle ist die Winkelverteilung steiler und für größere τ deuten die empirischen Werte an, daß die Verteilung noch flacher wird als \cos^α . Daraus ist zu schließen, daß in Blei ein wesentlicher Teil der Verbreiterung der Winkelverteilung von den Winkeln bei der Teilchenerzeugung herrührt, da bei reiner Vielfachstreuung (nach Teilchenemission in Richtung der Schauerachse, wie empirisch bekannt⁸ ist, die Winkelverteilung praktisch nicht flacher als eine \cos^2 -Verteilung wird.

⁸ W. Paul u. H. Frank, Landolt-Börnstein I, 5, 6. Auflage S. 325, Springer, Berlin 1952.

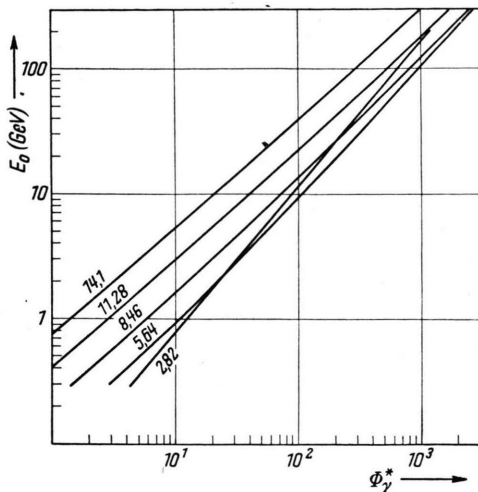


Abb. 6. Energieinhalt E_0 von „ π^0 -Kaskaden“ als Funktion der Teilchenzahl mit einigen Schichtdicken (in Strahlungslängen) als Parameter (in Blei). Abb. 6 wurde durch Umzeichnung von Abb. 2 (—) gewonnen.

Um die Abhängigkeit dieser Schlüsse von den statistischen Fehlern der in Abb. 4 wiedergegebenen Meßergebnisse besser aufzuzeigen, wurden diejenigen Grenzwerte mit eingezeichnet, denen sich $f_{\pi}(\tau)$ nähern müßte, wenn sich schließlich eine isotrope, \cos - oder \cos^2 -Verteilung einstellt. An Abb. 4 kann man außerdem ablesen, daß eine prozentuale Unsicherheit in t_{\max} nur zu einer wesentlich geringeren Unsicherheit in E_0 Anlaß gibt.

Herrn Prof. Heisenberg danke ich sehr für sein Interesse am Zustandekommen dieser Arbeit und Herrn Dr. Deutschmann für die Anregung hierzu und für wertvolle Diskussionen, insbesondere über den letzten Abschnitt. Die numerischen Rechnungen konnten an der Göttinger elektronischen Rechenmaschine G1 ausgeführt werden, wofür ich Herrn Prof. Biermann herzlich danke.

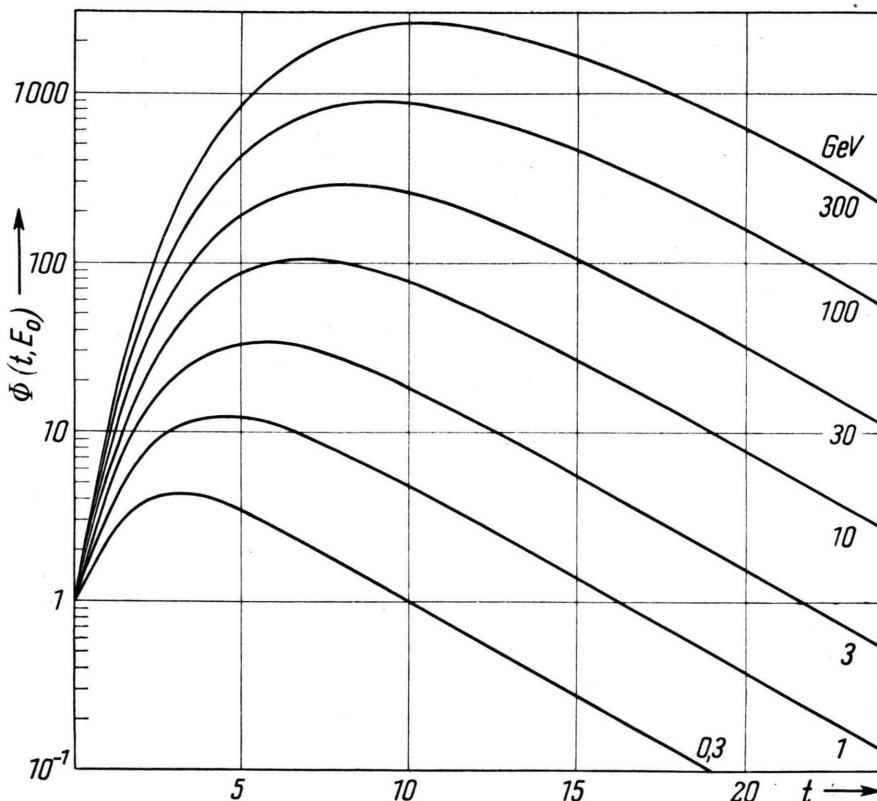


Abb. 7. $\Phi_{\varphi}(t, E_0)$ in einer von einem einzelnen Elektron der Energie E_0 (Parameter in GeV) ausgelösten Kaskade in Blei.